2

Q. D. B. V.

DE GEOMETRIA ACVSTICA SEV SOLIVS AVDITVS OPE EXERCENDA

DISSERTATIO I.

QVAM
CONSENTIENTE AMPLISSIMA FACVLTATE PHILOSOPHICA
PRO RECEPTIONE IN EANDEM
PVBLICE DEFENDET AVCTOR

M. IOANNES SCHVLTZ
COETVS PALAEO-ROSGARTENSIS DIACONVS

RESPONDENTE
CHRISTIANO THEOPHILO POTTIEN, REGIOM. BORVSS.
S. S THEOLOGIAE ET MATHESEOS CVLTORE

CONTRA OPPONENTES
CHRISTIANVM IACOBVM KRAVSE, OSTEROD. BORVSS. MATH. CVLT.
IACOBVM FRIDERICVM KVRELLA, KOSLAV. AD SOLDAV. I.V. ET PHIL. CVLT.

ANNO MDCCLXXV. DIE II. AVGVSTI
HORIS LOCOQVE SOLITIS.

CVM FIGVRIS AERI INCISIS.

REGIOMONTI
TYPIS SACR. REG. MAIEST. ET VNIVERS. TYPOGRAPH. G. L. HARTVNGII.

ILLVSTRISSIMO ET EXCELLENTISSIMO

DOMINO

IACOBO FRIDERICO

DE ROHD,

SACRAE REGIAE MAIESTATIS

ADMINISTRO STATVS ET BELLI INTIMO,

SVPREMO REGNI BVRGGRAVIO,

SVPREMAE APPELLATIONVM CVRIAE PRAESIDI EMINENTISSIMO,

ACADEMIAE REGIOMONTANAE CVRATORI GRATIOSISSIMO,

HAEREDITARIO DOMINO TERRARVM

SCHROMBEHNEN, KLEIN-LAVT &c.

ILLVSTRISSIMO ET EXCELLENTISSIMO

DOMINO

FRIDERICO ALEXANDRO

DE KORFF,

SACRAE REGIAE MAIESTATIS

ADMINISTRO STATVS ET BELLI INTIMO,

REGNI PRVSSIAE CANCELLARIO,

IVDICII AVLICI PRAESIDI EMINENTISSIMO,

RERVM FEVDALIVM ET MONTIS PIETATIS DIRECTORI

GRAVISSIMO,

HAEREDITARIO DOMINO TERRARVM

BLEDAV, KORBEN, MOLEHNEN, WEDDERAV, RIBBEN &c.

REVERENDISSIMO, ILLVSTRISSIMO

ET

EXCELLENTISSIMO

D O M I N O

FRIDERICO GODOFREDO

DE GROEBEN,

SACRAE REGIAE MAIESTATIS

ADMINISTRO STATVS ET BELLI INTIMO,

REGNI PRVSSIAE SVPREMO MARESCHALLO,

CONSISTORII PRVSSICI PRAESIDI EMINENTISSIMO,

ORDINIS IOANNITICI EQVITI,

HAEREDITARIO DOMINO TERRARVM

WESLIENEN, SCHOENRADE, ROEDERSDORFF &c.

REVERENDISSIMO, ILLVSTRISSIMO

ET

EXCELLENTISSIMO

DOMINO

LEOPOLDO

S. R. I. COMITI DE SCHLIEBEN,

SACRAE REGIAE MAIESTATIS

ADMINISTRO STATVS ET BELLI INTIMO,

COLLEGII PVPILLORVM CVRAM AGENTIS PRAESIDI

EMINENTISSIMO,

RERVM SCHOLASTICARVM SVPREMO MODERATORI,

ORDINIS IOANNITICI EQVITI,

HAEREDITARIO DOMINO TERRARVM

ALT - HAVS, GERDAVEN, SANDITTEN &c.

PRVSSIAE

PATRIBVS ET PROCERIBVS

RELIGIONIS IVSTITIAE ET LITTERARVM

PROTECTORIBVS

DOMINIS

ET

MAECENATIBVS

GENEROSISSIMIS, GRATIOSISSIMIS

DISSERTATIONEM HANC

MEQVE IPSVM

CVM ARDENTISSIMO OMNIGENAE FELICITATIS VOTO

EA, QVA PAR EST, DEVOTIONE

D. D. D.

IOANNES SCHVLTZ.

§. 3.

Instituatur haec obſeruatio non in vna, ſed binis ſtationibus B, C, ita vt tempora probe notentur, quae ſonus luminis comes in loco quaeſito A exortus abſoluit, donec ex A ad ſingulas ſtationes B et C tranſierit; hoc caſu non *diſtantiae* ſolum AB, AC, ſed praeterea quoque *ſitus* loci A reſpectu rectae aſſumtae BC i. e. anguli B et C inueniri poſſunt. Quum enim fig. 1. recta BC cognita ſit, ex obſeruatis vero ſoni temporibus, tam recta AB, quam AC per §. 2. reperiantur, ſingula trianguli ABC innoteſcunt latera, ideoque ſinguli ſimul eiusdem anguli, i. e. loci ſitus. Si igitur tempora inter ſenſum luminis et ſoni praeterlapſa in duabus obſeruantur ſtationibus, cuiuslibet areae campeſtris ichnographia ſine vllo inſtrumento geometrico rure adhibendo perfici poteſt, dummodo in ſingulis, quae in ichnographia notanda veniunt locis, tormentum exploditur, cuius lumen et ſonum in vtraque ſtatione percipere datum eſt.

§. 4.

Quum tamen methodus haec neceſſario ſupponat, quod locus A non viſus arte ſaltim reddatur viſibilis, multum abeſt, vt iis, quae §. 1. deſiderauimus, quod ſatis eſt, faciat. Vt enim praeteream, lumen ex inflammatione pulueris pyrii exploſo tormento ortum in ſtatione procul diſſita interdiu vix cerni: ſaepe expedit, ſitum diſtantiamque vel talium cognoſcere locorum, e quibus merus ſonus ſine lumine percipitur v. g. ſonus campanarum, excubiarum cet. Hinc arduum illud ſitum atque diſtantiam loci non viſi *ſolo auditu* explorandi intactum adhuc reſtat Problema, cuius ſolutio ſi detegatur, nouam Geometriae practicae conſtituet partem, quam, vt a communi, quae *optica* eſt, diſcernatur, Geometriam ***acuſticam*** ſ. ***ex mero auditu*** appellare iuuat.

§. 5.

Locus, cuius diſtantia pariter ac ſitus quaeritur, vel in eodem plano eſt cum ſtationibus obſeruatorum, vel ſupra illud eleuatum, vel infra illud depreſſum. Ergo Geometria acuſtica in tres potiſſimum diſpeſcenda eſt partes, quarum *prima* de locis in eodem obſeruatorum plano ſitis, *ſecunda* de locis plano hoc altioribus, *tertia* de locis eodem inferioribus aget. Quod tertiam quodammodo attinet, elegans quidem methodus, profunditates antrorum ſolo lapidis deſcendentis ſoni auditu explorandi, ab excellentiſſimo in Albertina noſtra Profeſſore Matheſeos ordinario D. Bvck, Praeceptore numquam non gratiſſima mente venerando, iamiam monſtrata eſt §. 8. commentationis 1768. ſub hoc titulo editae: Geographiſch mathematiſche Abhandlung von einigen in der Erde befindlichen denkwürdigen Höhlen und einer beſondern Art, die Tiefen derſelben zu finden. Interim quum in hac methodo praeter ſoni motum ſimul lex deſcenſus grauium in cenſum veniat, illa non niſi ad caſum ſpecialem extendi poteſt, in quo corpus graue v. g. lapis libere deſcendere queat, i. e. ad antra. Hinc alia adhuc opus eſt methodo, qua Problema §. 1. 4. propoſitum quam vniuerſaliſſime ſolui queat, ad quam ergo detegendam nunc ſenſim nobis ſternamus viam.

§. 6.

Hunc in finem ponamus, quod ſonus in loco A exortus in vna, vel etiam in duabus ſtationibus B, C obſeruatus ſit, nec vna, nec binae iſtae obſeruationes ſufficiunt, ad diſtantiam ſitumque loci A ſolo auditu inueſtigandum. In priori enim caſu, quia tempus, quo ſonus ex A ad B tranſiit, ignotum eſt, ex mero ſoni auditu nihil plane innoteſcere per ſe patet. In poſteriori autem ex eodem argumento nihil aliud detegitur, niſi ſola diſtantiarum AB et AC differentia. Poſito enim, ſonum minutis ſecundis *e* ſerius auditum eſſe in ſtatione C, quam in ſtatione B, ex §. 2.

 ſequi-

ſequitur, ſpatium, quod ſonus, poſtquam ad locum B peruenit, abſolvere adhuc debuit, donec tranſierit ad locum C, fore $= \frac{ae}{d}$. Hinc inuenitur $AC = AB + \frac{ae}{d}$

$$\text{ergo } AC - AB = \frac{ae}{d}$$

Patet igitur, ex binis tantum ſoni obſeruationibus nihil innoteſcere niſi rectam CD, ſeu, differentiam inter AC et AB fig. 1. Quum autem praeter rectam CD in triangulo ABC nihil notum ſit niſi recta data BC, per binas vero iſtas rectas BC, CD, triangulum ABC nullo modo determinetur, vltro ſequitur, ex auditu ſoni in binis ſolummodo ſtationibus facto nec diſtantiam nec ſitum explorari poſſe loci, vnde ſonus emanauerit.

§. 7.

Haec interea res ad elegantem quandam manu me duxit diſquiſitionem, quam praemittendam duco, antequam ad Caput diſſertationis progredior. Saepius nempe euenire poteſt, vt locus A Geometrae viſibilis quidem ſit, ſed non niſi in vnica ſtatione B, in omnibus vero ceteris ſtationibus datis C ſenſibiliter remotis per obiecta quaedam interiacentia oculo ipſius tegatur. Hic, licet ſitus loci appareat, eius diſtantia AB tamen per communes Geometriae regulas inueſtigari non poteſt. Sed fieri haec poſſunt, ſi ſonus in A exortus in binis percipiatur ſtationibus B, C. Ponamus ergo *primo*, locum A videri non poſſe niſi in ſtatione remotiori C, hoc caſu innoteſcit per *viſum* ſitus loci A ratione rectae aſſumtae BC, i. e. angulus *m*, fig. 1. per auditum vero differentia rectarum $AC - AB = \frac{ae}{d}$ (§. 6.). Fiat igitur $DC = \frac{ae}{d}$, erit $AD = AB$. Iam vero recta BC datur, ergo dantur in triangulo BCD latera BC, CD, cum

angulo intercepto *m*. Subtrahatur a gradibus 180. angulus *m*, reſiduum erit $= p+q$. Iam inferatur per principia Trigonometrica:

$$BC+DC : BC-DC = \text{Tang.} \tfrac{1}{2}(p+q) : \text{Tang.} \tfrac{1}{2}(p-q)$$

Inuenta hoc modo $\frac{1}{2}(p-q)$ addatur ſemiſummae $\frac{1}{2}(p+q)$, ſumma dat angulum maiorem *p*, qui ab 180° ſubtractus ſimul prodit angulum *r*. Quum vero ſit $AB = AD$ (ex hypotheſi) erit $r = n$. Subtractis igitur 2 r ab 180°, reſiduum eſt angulus o. Quodſi iam inferatur:

$$\text{Sin. ang. } o : BC = \text{Sin. ang. } m : AB,$$

inuenitur tandem diſtantia quaeſita AB, quae ſi addatur rectae $CD = \frac{ae}{d}$ ſimul prodit diſtantiam AC.

Absque calculo etiam ope conſtructionis geometricae res abſolui poteſt. Nam ex lateribus BC, CD et angulo intercepto *m* conſtruatur triangulum BDC. Quo facto recta DC ex arbitrio prolongetur, et inde enato angulo *r* fiat angulus *n* aequalis, rectae BA et CA ſeſe inuicem ſecabunt in loco quaeſito A.

§. 8.

Ponamus *ſecundo*, locum A (fig. 2.) non apparere niſi in ſtatione propinquiori B, viſus dat angulum m, auditus vero differentiam rectarum $AC - AB = \frac{ae}{d}$ (§. 6.). Fiat itaque $BD = \frac{ae}{d}$, erit $AD = AC$. Subtrahatur *m* ab 180°, reſiduum eſt angulus *r*, qui iterum ab 180° ſubtractus dat ſummam angulorum $p+q$. Iam inferatur:

$$BC+BD : BC-BD = \text{Tang.} \tfrac{1}{2}(p+q) : \text{Tang.} \tfrac{1}{2}(p-q)$$

Reperta hac ratione ſemidifferentia $\frac{1}{2}(p-q)$ addatur ſemiſummae $\frac{1}{2}(p+q)$, ſumma dat angulum maiorem $p = q+n$. Subtractis igitur 2 p ab 180°, remanet angulus *o*. Si itaque porro inferatur:

$$\text{Sin. ang. } o : BC = \text{Sin. ang. } m : AC,$$

tandem

tandem inuenitur diſtantia quaeſita AC, cui ſi ſubtrahatur $\frac{ae}{d} = BD$, reſiduum ſimul dat diſtantiam AB.

Mechanice res ita abſolui poteſt. Ex lateribus BC, BD et angulo intercepto *r* cognitis conſtruatur triangulum BCD, quo conſtructo, recta DB arbitrarie producta, angulus C aequetur angulo *p*, rectae DA, CA ſeſe interſecabunt in loco quaeſito A.

§. 9.

Ponamus *tertio*, ſonum in ſtationibus B et C eodem temporis momento audiri, hoc caſu eſt AB = AC, ergo etiam angulus m = n (fig. 3.). Quodſi igitur locus A in vna ſtationum B aut C viſibilis eſt adeoque angulus m vel n viſu explorari poteſt, diſtantia AB = AC reperitur inferendo:

Sin. angul. o : BC = Sin. angul. n : AB.

Si calculo carere velis, non opus eſt, niſi vt e latere dato BC et angulis aequalibus B et C viſu cognitis conſtruatur triangulum aequicrurum ABC.

§. 10.

Quum ex §§. 7. 8. manifeſtum ſit, datis vno angulo, vno latere, et differentia reliquorum laterum, triangulum prorſus determinari; inde nouum theorema Geometricum de identitate triangulorum immediate ſequitur:

Si in duobus triangulis angulus vnus cum vno latere adiacente et differentia reliquorum duorum laterum inuicem aequales ponuntur, triangula ipſa ſunt aequalia et ſimilia, i. e. eadem.

§. 11.

Idem locum habet, ſi differentiae loco *ſumma* reliquorum laterum in vtroque triangulo aequalis ponitur. Datis enim fig. 4. latere BC cum angulo C et ſumma vtriusque reliqui lateris AC + AB, fiat DC = AC + AB ·

et

et ducatur recta DB, vt cognoſcatur angulus D. Huic aequetur angulus r, et ducatur recta BA, erit, ob $r = D$, etiam $BA = DA$; adeoque $AB + AC = DC =$ ſummae duorum laterum datae. Quum itaque datis hiſce triangulum ABC prorſus determinetur; alterum inde theorema Geometricum de identitate triangulorum proficiſcitur:

Si in duobus triangulis angulus vnus, vnum latus adiacens et ſumma reliquorum laterum inuicem aequales ponuntur, triangula ipſa ſunt aequalia et ſimilia, i. e. eadem.

§. 12.

Ceſſet in eiusmodi triangulis cauſſa aequalitatis, ceſſabit aequalitas ipſa ceu effectus, nec remanebit niſi ſimilitudo. Quum autem aequalitas triangulorum §. 10. 11. determinatorum ab aequalitate lateris vnius et differentiae reliquorum oriatur, identitas triangulorum in meram tranſit ſimilitudinem, ſi bina haec data in duobus triangulis non aequalia, ſed proportionata ponantur. Vnde ſequens theorema geometricum de ſimilitudine triangulorum enaſcitur:

Si in duobus triangulis angulus vnus inuicem aequalis, et latus adiacens vel cum ſumma vel cum differentia reliquorum laterum in eadem ratione geometrica ponuntur, triangula ſunt ſimilia.

§. 13.

Sed miſſis hiſce redeamus ad propoſitum. Cognouimus ex §. 6, obſeruationes ſoni in binis ſtationibus factas nondum ſufficere, ad ſitum diſtantiamque loci, vnde ſonus exierit, inueniendum, niſi ſimul ſitum eius §. 7. 8. 9. viſu explorare datum ſit. Quum vero hoc caſu locus partim viſu, partim auditu inueſtigandus foret, per ſe patet, tres ſaltim ſoni obſeruationes in tribus nempe ſtationibus B, C, D requiri, ſi diſtantia pariter ac ſitus loci mero auditu inuenienda ſit.

Ponamus

Ponamus itaque, ſonum in A excitatum a tribus obſeruatoribus in ſtationibus B, C, D audiri, fig. 5, idque ita, vt *e* minutis ſecundis ſerius percipiatur in C, quam in B, et *f* minutis ſecundis ſerius in D, quam in C, erit per §. 6.

$$AC - AB = \frac{ae}{d}, \quad AD - AC = \frac{af}{d}.$$

Tali modo auditus dat differentias diſtantiarum AB, AC, AD. Sed praeter haſce in quadrangulo ABCD nihil innoteſcit, niſi duae rectae BC, CD cum angulo intercepto BCD, quippe quas in campo metiri licet. Quodſi itaque ſitus et diſtantia loci mero auditu explorari debeat, tota res ad ſequens redit

PROBLEMA GENERALE:

Datis, in figura quadrilatera ABCD, binis lateribus BC et CD cum angulo intercepto BCD, et rectarum AB, AC, AD differentiis, invenire ipſas rectas AB, AC, AD adeoque totum Quadrangulum ABCD.

§. 14.

Huius problematis ſolutio, cui tota Geometria acuſtica innititur, admodum quamlibet intricata, variis tamen abſolui poteſt modis, inter quos tres potiſſimum ceteris mihi videntur praeſtantiores. *Primae* omnium ſolutionis auctor eſt cel. IONAS MELDERCREVZ, Architectus militaris Suecicus, qui Tom. 3. Commentationum Academiae regiae Scientiarum Suecicae pag. 82-87. ſecundum verſionem KAESTNERIANAM, problema noſtrum per binas hyperbolas ſe mutuo ſecantes ſoluere docuit. *Secundam*, quae trigonometrica eſt, nutu illuſtr. KAESTNERI rimatus ſum, qui l. c. pag. 84. poſſibilitatem eius quidem innuit, ipſius vero ſolutionis haud fecit periculum. Quae vero quum ob Sinus et Coſinus illam intrantes nec in calculum quidem logarithmicum commutabiles in praxi nimium taedii creet atque moleſtiae, *tertiam* meditatus ſum ſolu-

tionem, quae quia mere geometrica eſt, calculum praebet commodiorem. In praeſenti diſſertatione duas priores ſolutiones expoſuiſſe ſufficiat. Tertiam vna cum reliquis, quae Geometriae acuſticae praxin concernunt, capitibus, ad aliud, ſi Deo viſum fuerit, tempus differo.

§. 15.

Sint fig. 6. puncta B et C foci duarum hyperbolarum aequalium, quarum axes cum axe transuerſo communi GI in directum iaceant. Iam ſit AC — AB axi communi GI aequalis, tunc punctum A eſt locus in hyperbola GE e vertice G circa focum B deſcripta.

Eodem modo C et D ſint foci duarum hyperbolarum aequalium, quarum axes cum axe transuerſo communi HK in directum iaceant. Iam ſit AD — AC axi communi HK aequalis, tunc punctum A eſt locus in hyperbola HF e vertice H circa focum C deſcripta. Vid. Wolfii Elementa Analyſ. P. 1. §. 470. Hoc Theorema e natura hyperbolae fluens ad ſolutionem Problematis generalis §. 13. ducit immediate.

Nimirum conſiderentur ſtationes B et C vt foci duarum hyperbolarum aequalium. Fiat axis transuerſus communis $GI = \frac{ae}{d}$ (§. 13.) et deſcribatur circa focum B, vbi ſonus primum auditus fuerit, e vertice G hyperbola GE. Porro conſiderentur ſtationes C et D vt foci duarum aliarum hyperbolarum aequalium. Fiat earum axis transuerſus communis $HK = \frac{af}{d}$ (§. 13.) et deſcribatur circa focum C, vbi ſonus prius auditus fuerit, quam in D, e vertice H hyperbola HF. Quo facto punctum A, in quo vtraque hyperbola ſe mutuo interſecat, eſt locus quaeſitus, vnde ſonus exiit, adeoque totum Quadrangulum ABCD, eiusque tam anguli, quam diſtantiae AB, AC, AD inueniuntur.

Demon-

Demonſtratio huius ſolutionis ex theoremate praemiſſo prono fluit alueo. Eſt enim per §. 13. $\frac{ae}{d} = AC - AB$, adeoque $AC - AB$ axi GI hyperbolae GE aequalis. Ergo locus A eſt in hyperbola GE. Porro eſt per §. 13. $\frac{af}{d} = AD - AC$, adeoque $AD - AC$ axi HK hyperbolae HF aequalis. Ergo locus A etiam eſt in hyperbola HF. Quum itaque locus A in vtraque hyperbola GE et HF ſimul ſit, erit in eo puncto, vbi hyperbolae iſtae ſe mutuo ſecant.

§. 16.

Ex prima hac problematis noſtri ſolutione generali vt praecipua pro caſibus ſpecialioribus eruamus Corollaria, ponamus 1mo ſonum in A exortum in vtraque ſtatione B et C ſimul ſ. eodem momento percipi, id ſignum erit fig. 7. diſtantias AB et AC eſſe aequales, adeoque $AC - AB = 0$. Hoc igitur caſu hyperbolae GE axis GI euadit $= 0$, adeoque diſtantia foci $BG = \frac{1}{2} BC = GC$. Iam vero triangulum ABC, ob $AB = AC$, eſt aequicrurum, cuius vertex ſemper eſt locus in recta perpendiculari in mediam baſin G demiſſa GE. Ergo in hoc caſu hyperbola GE mutatur in lineam rectam in medio G rectae BC perpendiculariter erectam GE, adeoque locus quaeſitus eſt in puncto A, in quo perpendicularis GE hyperbolam HF ſecat. Patet igitur, hoc caſu vnius tantum requiri hyperbolae deſcriptionem.

§. 17.

Ponamus 2do, ſonum in ſingulis tribus ſtationibus B, C, D audiri ſimul, id indicio foret, diſtantias AB, AC, AD omnes aequales eſſe. Ergo vtraque hyperbola hoc caſu mutatur in rectas in mediis rectarum BC,

 CD,

CD, perpendiculariter erectas GE et HF fig. 8, quarum ſectio in A dat locum quaeſitum, vnde ſonus egreſſus eſt.

§. 18.

Ponamus 3tio tempus, quo ſonus ſerius in C, quam in B auditur, eiusmodi eſſe, vt reperiatur $\frac{ac}{d} = BC$, hoc caſu erit $AC - AB = BC$, conſequenter $AC = AB + BC$; ergo hic loca A, B, C iacent in directum i. e. in eadem recta ABC fig. 9. Hinc vnica tantum hyperbola HF deſcribenda eſt, quae rectam BC arbitrarie productam ſecabit in loco quaeſito A, vnde ſonus exiit.

§. 19.

Ponamus 4to, tempora, quibus ſonus ſerius in C, quam in B, et ſerius in D, quam in C auditur, eiusmodi eſſe, vt non ſolum $\frac{ae}{d} = BC$, ſed etiam $\frac{af}{d} = CD$ reperiatur, id indicio foret, locum quaeſitum A cum ſingulis ſtationibus B, C, D in directum iacere, i. e. in eadem recta ABCD fig. 10. Hoc itaque caſu nulla linearum ſectio, ergo nec problematis ſolutio mero auditu poſſibilis eſt. En vnicum caſum, in quo Problema noſtrum indeterminatum manet, quamuis tempora ſoni auditi in tribus ſtationibus obſeruata fuerint. Interea hic caſus talis eſt, vt in praxi non ſolum fere nunquam accidere poſſit, ſed etiam, ſi forte occurreret, verum certe loci indicaret ſitum, id quod ſaepius iam ſufficit. Quid? quod, ſi occaſio hic data eſt, ſonum adhuc in quarta quadam ſtatione E obſeruandi, per §. 7. 8. et diſtantia loci A inueſtigari poteſt.

§. 20.

Haec, problematis noſtri ſoluendi methodus MELDERCREVZIANA, quam ab auctore obſcurius et absque demonſtratione traditam, prout fieri poteſt, illuſtrare conatus ſum, inter omnes eſt euidentiſſima. Nihilo tamen minus, quum duarum hyperbolarum conſtructionem earumque ſectionem requirat, in praxi non modo admodum moleſta eſt, ſed quoque, vti Auctor l. c. p. 87. ipſe fatetur, ob id ipſum periculo a vero aberrandi nimis ſubiecta eſt. Equidem in praxi ſolutio haec, vt et auctori viſum eſt, non parum facilitari videtur, ſi ſtationes B, C, D ita eligantur, vti §. 16. 18. et praecipue §. 17. ſupponuntur, dum in prioribus caſibus vnius tantum hyperbolae conſtructione, in poſteriori vero non niſi duabus rectis perpendicularibus opus eſt. Sed hic nodus eſt Gordius, quia in praxi ſtationes tali modo eligere, tantum non diuinum eſt. Quum enim quaeſtio ſit de loco, cuius ſitus plane ignotus eſt, nec viſu explorari poteſt, merus caſus fortuitus erit vix vnquam exiſtens, ſtationes B, C, D ita eligendi, vt conditionibus §. 16. 17. 18. ſatisfaciant. Etſi igitur Corollaria §. 16. 17. 18. facili problematis ſolutioni maxime fauere videntur, in praxi tamen nil praebent commodi, quia Geometrae conditiones praeſuppoſitas adimplere fere nunquam datum eſt. Vnde elucet, quam vtile ſit, commodiores Problema noſtrum ſoluendi explorare methodos.

§. 21.

Altera problematis noſtri ſolutio, quam hic tradere pollicitus ſum, ſequentem, quae igitur antea diſquirenda eſt, ſupponit

Quaeſtionem Trigonometricam:

Datis ſinu ſummae duorum angulorum $(u+v)$, et ſinu anguli u inuenire ſinum anguli alterius v.

Solutio. Sit fig. 11. Sinus totus $DC = BC = 1$, ſummae angulo-

cum $(u+v)$ ſinus $DF = p$, eius Coſinus $FC = q$, anguli u ſinus $AB = t$, erit anguli u Coſinus $AC = \sqrt{(1-t^2)}$ et anguli v ſinus quaeſitus $= DH$. Iam vero

$$AC : AB = FC : FG$$

$$\sqrt{(1-t^2)} : t = q : FG$$

$$FG = \frac{qt}{\sqrt{(1-t^2)}}$$

Quum itaque ſit

$$DG = DF - FG$$

erit $DG = p - \frac{qt}{\sqrt{(1-t^2)}}$

$$DG = \frac{p\sqrt{(1-t^2)} - qt}{\sqrt{(1-t^2)}}$$

Porro eſt

$$GC^2 = FC^2 + FG^2$$

$$GC^2 = q^2 + \frac{q^2t^2}{1-t^2}$$

$$GC^2 = \frac{q^2 - q^2t^2 + q^2t^2}{1-t^2}$$

$$GC = \frac{q}{\sqrt{(1-t^2)}}$$

Iam vero

$$GC : FC = DG : DH$$

$$\frac{q}{\sqrt{(1-t^2)}} : q = \frac{p\sqrt{(1-t^2)} - qt}{\sqrt{(1-t^2)}} : DH$$

$DH = p\sqrt{(1-t^2)} - qt =$ Sinui quaeſito anguli v.

§. 22.

Hac quaestione trigonometrica soluta, Problema nostrum generale sequenti modo soluimus.

Sit recta data BC $= m$ Sinus totus $= 1$
CD $= n$ anguli dati BCD Sinus $= p$
eius Cosinus $= q$
distantiarum AC et AB differentia auditu inuenta $= b$
distantiarum AD et AB differentia auditu inuenta $= c$
distantia quaesita AB $= x$.

Demissis fig. 12. perpendicularibus AG et AF, erit BG $= m -$ GC, FD $= n -$ CF, et angulus (u+v) complementum anguli dati BCD ad 180°, ergo anguli (u+v) Sinus $= p$ eius cosinus $= q$. Iam vero

$$AB^2 - BG^2 = AC^2 - GC^2$$

$$x^2 - (m - GC)^2 = (x + b)^2 - GC^2$$

$$x^2 - m^2 + 2m.\,GC - GC^2 = x^2 + 2bx + b^2 - GC^2$$

$$GC = \frac{m^2 + b^2 + 2bx}{2m}$$

Sed

$$AC : \text{Sin. tot.} = GC : \text{Sin. } p\ u$$

$$\text{Sin. ang. } u = \frac{GC}{AC}$$

$$\text{Sin. ang. } u = \frac{m^2 + b^2 + 2bx}{2m(b + x)}$$

Porro est

$$AC^2 - CF^2 = AD^2 - FD^2$$

$$x^2 + 2bx + b^2 - CF^2 = x^2 + 2cx + c^2 - n^2 + 2n.\,CF - CF^2$$

$$\frac{n^2 + b^2 - c^2 + 2(b - c)x}{2n} = CF$$

Sed

Sed

$$AC : \text{Sin. tot.} = CF : \text{Sin. } p \text{ v.}$$

$$\text{Sin. ang. v.} = \frac{CF}{AC}$$

$$\text{Sin. ang. v.} = \frac{n^2 + b^2 - c^2 + 2(b-c)x}{2n(b+x)}$$

Iam ponatur Sinus anguli $u = t$

et Sinus anguli $v = z$; erit

$$z = p\sqrt{(1-t^2)} - qt \quad (\S.\ 21.)$$

$$z = p\sqrt{\left\{1 - \frac{(m^2+b^2+2bx)^2}{4m^2(b+x)^2}\right\}} - \frac{(m^2+b^2)q + 2bqx}{2m(b+x)}$$

$$z = p\sqrt{\left(\frac{4m^2(b+x)^2 - (m^2+b^2+2bx)^2}{4m^2(b+x)^2}\right)} - \frac{(m^2+b^2)q + 2bqx}{2m(b+x)}$$

$$z = \frac{p}{2m(b+x)}\sqrt{(4m^2b^2 + 8m^2bx + 4m^2x^2 - (m^2+b^2)^2 - 4(m^2+b^2)bx - 4b^2x^2)} - \frac{(m^2+b^2)q + 2bqx}{2m(b+x)}$$

$$z = \frac{p}{2m(b+x)}\sqrt{(4(m^2-b^2)x^2 + 4(m^2-b^2)bx - (m^2-b^2)^2)} - \frac{(m^2+b^2)q + 2bqx}{2m(b+x)}$$

Sed $z = \dfrac{n^2 + b^2 - c^2 + 2(b-c)x}{2n(b+x)}$ (per superiora)

Ergo

$$\frac{n^2+b^2-c^2+2(b-c)x}{2n(b+x)} = \frac{p}{2m(b+x)}\sqrt{(4(m^2-b^2)x^2 + 4(m^2-b^2)bx - (m^2-b^2)^2)} - \frac{(m^2+b^2)q + 2bqx}{2m(b+x)}$$

$$m(n^2+b^2-c^2) + 2m(b-c)x = np\sqrt{(4(m^2-b^2)x^2 + 4(m^2-b^2)bx - (m^2-b^2)^2)} - (m^2+b^2)nq - 2bnqx$$

$$m(n^2+b^2-c^2)+(m^2+b^2)nq+(2m(b-c)+2bnq)x$$
$$=np\sqrt{(4(m^2-b^2)x^2+4(m^2-b^2)bx-(m^2-b^2)^2)}$$

Nunc breuitatis caussa ponatur

$$m(n^2+b^2-c^2)=g$$
$$(m^2+b^2)n=h$$
$$2m(b-c)=k$$
$$m^2-b^2=l\text{; erit}$$

$$g+hq+(k+2bnq)x=np\sqrt{(4lx^2+4blx-l^2)}$$

$$(g+hq)^2+2(g+hq)(k+2bnq)x+(k+2bnq)^2x^2=4n^2p^2lx^2+4n^2p^2blx-n^2p^2l^2$$

$$(g+hq)^2+n^2p^2l^2=(4n^2p^2l-(k+2bnq)^2)x^2+(4n^2p^2bl-2(g+hq)(k+2bnq))x$$

$$\frac{(g+hq)^2+n^2p^2l^2}{4n^2p^2l-(k+2bnq)^2}=x^2+2\frac{(2n^2p^2bl-(g+hq)(k+2bnq))x}{4n^2p^2l-(k+2bnq)^2}$$

Sic quantitatem x, id est, distantiam loci quaesitam AB iam determinatam habemus per aequationem quadraticam facillime solubilem, si quantitates cognitae calculo antea definitae sint. Ponamus itaque calculo inueniri

$$(g+hq)^2+n^2p^2l^2=\beta$$
$$2n^2p^2bl-(g+hq)(k+2bnq)=\gamma$$
$$4n^2p^2l-(k+2bnq)^2=\delta\text{; erit}$$

$$\frac{\beta}{\delta}=x^2+2\frac{\gamma}{\delta}x$$

$$\frac{\beta}{\delta}+\frac{\gamma^2}{\delta^2}=x^2+2\frac{\gamma}{\delta}x+\frac{\gamma^2}{\delta^2}$$

$$\frac{\beta\delta+\gamma^2}{\delta^2}=\left(x+\frac{\gamma}{\delta}\right)^2$$

$$\frac{1}{\delta}\sqrt{(\beta\delta+\gamma^2)}-\frac{\gamma}{\delta}=x$$

$$\frac{-\gamma+\sqrt{(\beta\delta+\gamma^2)}}{\delta}=x=\text{distantiae quaesitae AB.}$$

§. 23.

Ex ſolo formulae huius generalis intuitu iam ſatis apparet, quam oneroſo hic opus ſit calculo. Hinc in eligendis ſtationibus B, C, D neceſſe eſt, vt commoda quaerantur, quae calculum abbreuient atque facilitent. Haec ſubeſt cauſſa, cur in ſoluendo Problemate noſtro praecipue ſubſtiterim in aequatione quadratica:

$$\frac{(g+hq)^2+n^2p^2l^2}{4n^2p^2l-(k+2bnq)^2} = x^2+2\frac{(2n^2p^2bl-(g+hq)(k+2bnq))x}{4n^2p^2l-(k+2bnq)^2}$$

quia ex hac aequatione, caſus ſpecialiores calculum abbreuiantes facillime erui poſſunt. Accuratior horum caſuum inueſtigatio docebit, quam breuis euadere poſſit calculus, dummodo ſtationes B, C, D commode eligantur.

§. 24.

Praecipua, qua calculus laborat, moleſtia e Sinu p et Coſinu q anguli dati BCD enaſcitur. Breuior ergo iure ſperatur calculus, ſi Sinus p et Coſinus q e calculo eliminentur. Id quod euenit ſi *primo* ſtationes B, C, D ita eligantur, vt rectae BC et CD angulum faciant rectum. Hoc enim caſu fig. 13. Sinus p mutatur in Sinum totum, qui eſt $=1$, et coſinus q euadit $=0$.

Hinc formula generalis §. 22.

$$\frac{(g+hq)^2+n^2p^2l^2}{4n^2p^2l-(k+2bnq)^2} = x^2+2\frac{(2n^2p^2bl-(g+hq)(k+2bnq))x}{4n^2p^2l-(k+2bnq)^2}$$

tranſit in hanc:

$$\frac{g^2+n^2l^2}{4n^2l-k^2} = x^2+2\frac{(2n^2bl-gk).\,x}{4n^2l-k^2}$$

Quum itaque $x = \frac{1}{\delta}\sqrt{(\beta\delta+\gamma^2)} - \frac{\gamma}{\delta}$ (§. 22.)

in

in hoc casu est $\beta = g^2 + n^2 l^2$

$$\gamma = 2n^2 bl - gk$$

$$\delta = 4n^2 l - k^2$$

Vnde elucet, quantum in hoc casu calculi lucretur breuitas.

§. 25.

Vt de veritate huius Corollarii hocque simul de veritate ipsius generalis nostrae aequationis quadraticae, e qua illud immediate deduximus, eo certiores reddamur, non inutile erit, illud a priori demonstrare. Sint ergo fig. 13. denominationes eaedem, vti §. 22. nempe $BC = m$, $CD = n$, $AB = x$, $AC = x + b$, $AD = x + c$, erit $GC = m - GB$, $FD = n - CF$.

Iam vero

$$AB^2 - BG^2 = AC^2 - GC^2$$

$$x^2 - BG^2 = x^2 + 2bx + b^2 - GB^2 + 2mGB - m^2$$

$$\frac{m^2 - b^2 - 2bx}{2m} = GB$$

Sed

$$CF^2 = AG^2 = AB^2 - GB^2$$

$$CF^2 = x^2 - \frac{((m^2 - b^2) - 2bx)^2}{4m^2}$$

Ponatur, vti §. 22, $m^2 - b^2 = l$, erit

$$CF^2 = x^2 - \frac{(l - 2bx)^2}{4m^2}$$

$$CF^2 = \frac{4m^2x^2 - l^2 + 4blx - 4b^2x^2}{4m^2}$$

$$CF = \frac{1}{2m} \sqrt{(4lx^2 + 4blx - l^2)}.$$

Eſt autem porro

$$AC^2 - CF^2 = AD^2 - FD^2$$

$$x^2 + 2bx + b^2 - CF^2 = x^2 + 2cx + c^2 - n^2 + 2n . CF - CF^2$$

$$\frac{n^2 + b^2 - c^2 + 2(b-c)x}{2n} = CF$$

Ergo

$$\frac{n^2 + b^2 - c^2 + 2(b-c)x}{2n} = \frac{1}{2m} \sqrt{(4lx^2 + 4blx - l^2)}$$

$$m(n^2 + b^2 - c^2) + 2m(b-c)x = n\sqrt{(4lx^2 + 4blx - l^2)}$$

Iam ponatur, vti §. 22. $m(n^2 + b^2 - c^2) = g$

$2m(b-c) = k$; erit

$$g + kx = n\sqrt{(4lx^2 + 4blx - l^2)}$$

$$g^2 + 2gkx + k^2x^2 = 4n^2lx^2 + 4n^2blx - n^2l^2$$

$$g^2 + n^2l^2 = (4n^2l - k^2)x^2 + 2(2n^2bl - gk)x$$

$$\frac{g^2 + n^2l^2}{4n^2l - k^2} = x^2 + \frac{2(2n^2bl - gk).\ x.}{4n^2l - k^2}$$

Ergo eadem prodit aequatio, quam §. 24. ex aequatione generali Corollarii loco eruimus,

§. 26.

Ponamus 2do, quod ex obſeruationibus ſoni inueniretur $b = m$, hoc caſu ſequeretur locum quaeſitum A cum binis ſtationibus B, C eſſe in eadem recta fig. 14; adeoque $m^2 - b^2 = l = o$. Ergo aequatio generalis

$$\frac{(g + hq)^2 + n^2p^2l^2}{4n^2p^2l - (k + 2bnq)^2} = x^2 + \frac{2(2n^2p^2bl - (g + hq)(k + 2bnq))\ x}{4n^2p^2l - (k + 2bnq)^2}$$

muta-

mutabitur in hanc:

$$-\frac{(g+hq)^2}{(k+2bnq)^2} = x^2 + \frac{2(g+hq)\,x}{k+2bnq}$$

$$o = x + \frac{g+hq}{k+2bnq}$$

$$-\frac{g+hq}{k+2mnq} = x$$

Sed $g = m\,(m^2+n^2-c^2)$

$h = 2\,m^2 n$ §. 22.

$k = 2\,m(m-c)$; hinc

$$-\frac{m\,(m^2+n^2-c^2)+2\,m^2 nq}{2\,m\,(m-c+nq)} = x$$

$$\frac{m^2+n^2-c^2+2\,mnq}{2\,(c-m-nq)} = x$$

§. 27.

Ad formulae noſtrae generalis certitudinem iterum confirmandam caſum hunc a priori inueſtigemus. Sint fig. 14. denominationes eaedem, ac §. 22; erit

$$x^2+2\,mx+m^2-FC^2 = x^2+2\,cx+c^2-n^2-2\,n.\;CF-FC^2$$

$$2\,(m-c)\,x = -(m^2+n^2-c^2+2\,n.\;FC)$$

Iam vero

$$1 : (m+x) = q : FC$$

$$FC = mq + qx. \quad \text{Ergo}$$

$$2\,(m-c)\,x = -\,(m^2+n^2-c^2+2\,mnq+2\,nqx)$$

$$2\,(m-c+nq)\,x = -\,(m^2+n^2-c^2+2\,mnq)$$

$$x = \frac{m^2+n^2-c^2+2\,mnq}{2\,(c-m-nq)}$$

Hinc

Hinc apparet eandem prouenire formulam, quam §. 26. e generali deduximus.

§. 28.

Ponamus 3tio, locum A non ſolum cum binis ſtationibus B, C in eadem recta, ſed praeter haec angulum BCD ſimul eſſe rectum fig. 15; erit $p = 1$, $q = 0$. Hinc formula §. 26. 27. inuenta:

$$x = \frac{m^2 + n^2 - c^2 + 2mnq}{2(c - m - nq)}$$

tranſit in ſequentem:

$$x = \frac{m^2 + n^2 - c^2}{2(c - m)}$$

§. 29.

Ponamus 4to, praeter conditiones § 28. ſuppoſitas, ſtationes BC, CD ſimul eſſe aequales, erit $m = n$, ergo per §. 28. erit

$$x = \frac{2m^2 - c^2}{2(c - m)}$$

§. 30.

Ponamus vero 5to, praeter conditiones §. 28 aſſumtas, ex obſeruatione ſimul reperiri $c = n$, hoc caſu aequatio §. 28.

$$x = \frac{m^2 + n^2 - c^2}{2(c - m)}$$

tranſit in iſtam:

$$x = \frac{m^2}{2(n - m)}$$

In

In hoc igitur casu nunquam eligenda est $m = n$ seu BC = CD nisi problema velis indissolubile, quia alioquin euaderet $x = \frac{m^2}{0} = \infty$. Id quod etiam a priori facile est intellectu. Nam quum AD = AB + c, posito c = n erit AD = AB + n; hinc posito simul n = m, erit AD = AB + m = AB + BC = AC fig. 15. Ergo punctum D cadit in C. Itaque hoc casu perinde est ac si sonus in binis tantum stationibus B, C in directum iacentibus observatus esset, quae vero ad locum A determinandum per §. 6. non sufficiunt.

§. 31.

Ponamus 6to, sonum in binis stationibus B, C *eodem momento* audiri, erit AC = AB, fig. 16. consequenter $b = 0$. Ergo aequatio generalis

$$\frac{(g+hq)^2+l^2n^2p^2}{4n^2p^2l-(k+2bnq)^2} = x^2 + \frac{2(2n^2p^2bl-(g+hq)(k+2bnq))\,x}{4n^2p^2l-(k+2bnq)^2}$$

hoc casu coalescit in hanc:

$$\frac{(g+hq)^2+n^2p^2l^2}{4n^2p^2l-k^2} = x^2 - \frac{2(g+hq)kx}{4n^2p^2l-k^2}$$

Sed per §. 22. in hoc casu est

$g = m(n^2-c^2)$, $b = m^2n$, $k = -2mc$, $l = m^2$

Ergo

$$\frac{m^2(n^2-c^2+mnq)^2+m^4n^2p^2}{4m^2n^2p^2-4m^2c^2} = x^2 + \frac{4(m(n^2-c^2)+m^2nq)mcx}{4m^2n^2p^2-4m^2c^2}$$

$$\frac{(n^2-c^2+mnq)^2+m^2n^2p^2}{4(n^2p^2-c^2)} = x^2 + \frac{(n^2-c^2+mnq)cx}{n^2p^2-c^2}$$

$$\frac{(n^2-c^2+mnq)^2+m^2n^2p^2}{4(n^2p^2-c^2)} + \frac{(n^2-c^2+mnq)^2c^2}{4(n^2p^2-c^2)^2} = \left\{x+\frac{(n^2-c^2+mnq)c}{2(n^2p^2-c^2)}\right\}^2$$

$$\frac{\sqrt{((n^2-c^2+mnq)^2(n^2p^2-c^2)+m^2n^2p^2(n^2p^2-c^2)+(n^2-c^2+mnq)^2c^2)}}{4(n^2p^2-c^2)^2}$$

$$= x+\frac{(n^2-c^2+mnq)c}{2(n^2p^2-c^2)}$$

$$\frac{1}{2(n^2p^2-c^2)}\sqrt{((n^2-c^2+mnq)^2n^2p^2+(m^2n^2p^2-m^2c^2)n^2p^2)}$$

$$-\frac{(n^2-c^2+mnq)c}{2(n^2p^2-c^2)}=x$$

$$\frac{np\sqrt{((n^2-c^2+mnq)^2+m^2(n^2p^2-c^2))}-(n^2-c^2+mnq)c}{2(n^2p^2-c^2)}=x$$

§. 32.

Veritas huius Corollarii haud difficulter confirmatur, si casum hunc specialem a priori disquirere velimus. Sint enim de nominationes fig. 16. eaedem, quibus hucusque vsi sumus. Ductis perpendicularibus AG, AF, posito AC = AB, erit GC = $\frac{1}{2}$ BC = $\frac{1}{2}m$, sed FD = n — CF

Iam vero

$$\text{Sin p. } u = t = \frac{GC}{AC} = \frac{m}{2x}$$

$$\text{et Sin. p. } v = z = \frac{CF}{AC} = \frac{CF}{x}$$

Sed

$$x^2-CF^2 = x^2+2cx+c^2-n^2+2n.\ CF-CF^2$$

$$\frac{n^2-c^2-2cx}{2n} = CF$$

Ergo

$$\text{Sin p. } v = z = \frac{n^2-c^2-2cx}{2nx}$$

Porro

Porro est

$$z = p\sqrt{(1-t^2)} - qt$$

$$z = p\sqrt{\left(1 - \frac{m^2}{4x^2}\right)} - \frac{mq}{2x}$$

$$z = \frac{p}{2x}\sqrt{(4x^2 - m^2)} - \frac{mq}{2x}$$

Hinc

$$\frac{p}{2x}\sqrt{(4x^2 - m^2)} - \frac{mq}{2x} = \frac{n^2 - c^2 - 2cx}{2nx}$$

$$np\sqrt{(4x^2 - m^2)} - mnq = n^2 - c^2 - 2cx$$

$$np\sqrt{(4x^2 - m^2)} = n^2 - c^2 + mnq - 2cx$$

$$4n^2p^2x^2 - m^2n^2p^2 = (n^2 - c^2 + mnq)^2 - 4(n^2 - c^2 + mnq)cx + 4c^2x^2$$

$$4(n^2p^2 - c^2)x^2 + 4(n^2 - c^2 + mnq)cx = (n^2 - c^2 + mnq)^2 + m^2n^2p^2$$

$$x^2 + \frac{(n^2 - c^2 + mnq)cx}{n^2p^2 - c^2} = \frac{(n^2 - c^2 + mnq)^2 + m^2n^2p^2}{4(n^2p^2 - c^2)}$$

Ergo eadem exsurgit aequatio quadratica, quae §. praeced. Corollarii loco deducta est, quam itaque vlterius prosequi plane foret inutile.

§. 33.

Ponamus 7timo sonum non modo in binis stationibus B, C audiri eodem momento, sed etiam angulum datum C, quem rectae BC, CD formant, esse praeterea rectum fig. 17; ob priorem conditionem erit $b = 0$, ob posteriorem vero $p = 1$, $q = 0$, ergo aequatio §. 31. inuenta:

$$x = \frac{np\sqrt{((n^2 - c^2 + mnq)^2 + m^2(n^2p^2 - c^2))} - (n^2 - c^2 + mnq)c}{2(n^2p^2 - c^2)}$$

 transit

transit in hanc:

$$x = \frac{n}{2(n^2-c^2)} \sqrt{((n^2-c^2)^2 + m^2(n^2-c^2))} - \frac{1}{2}c$$

$$\text{ergo } x = \frac{n}{2} \sqrt{\left\{\frac{m^2+n^2-c^2}{n^2-c^2}\right\}} - \frac{1}{2}c$$

§. 34.

Operae pretium erit hunc quoque casum a priori excutere. Sumtis igitur iisdem denominationibus, per conditiones §. 33. erit $AC = AB = x$, hinc $GC = \frac{1}{2}m$, $FD = n - CF$, porro angulus BCD rectus fig. 17. Iam vero hoc casu est $AF = GC = \frac{1}{2}m$; ergo

$$CF^2 = AC^2 - AF^2$$

$$CF = \sqrt{(x^2 - \frac{1}{4}m^2)}$$

$$CF = \frac{1}{2}\sqrt{(4x^2 - m^2)}$$

Porro est

$$x^2 - CF^2 = x^2 + 2cx + c^2 - n^2 + 2n.\ CF - CF^2$$

$$\frac{n^2 - c^2 - 2cx}{2n} = CF$$

Hinc

$$\frac{n^2 - c^2 - 2cx}{2n} = \frac{1}{2}\sqrt{(4x^2 - m^2)}$$

$$n^2 - c^2 - 2cx = n\sqrt{(4x^2 - m^2)}$$

$$(n^2 - c^2)^2 - 4(n^2 - c^2)cx + 4c^2x^2 = 4n^2x^2 - m^2n^2$$

$$(n^2 - c^2)^2 + m^2n^2 = 4(n^2 - c^2)x^2 + 4(n^2 - c^2)cx$$

$$\frac{(n^2 - c^2)^2 + m^2n^2}{4(n^2 - c^2)} = x^2 + cx$$

$$\frac{(n^2-c^2)^2+m^2n^2+(n^2-c^2)c^2}{4(n^2-c^2)}=x^2+cx+\tfrac{1}{4}c^2$$

$$\frac{(n^2-c^2)n^2+m^2n^2}{4(n^2-c^2)}=x^2+cx+\tfrac{1}{4}c^2$$

$$\frac{n}{2}\sqrt{\frac{m^2+n^2-c^2}{n^2-c^2}}-\tfrac{1}{2}c=x$$

§. 35.

Ponamus 8vo praeter conditiones §. 33. aſſumtas adhuc BC=CD i. e. $m=n$; erit per §. 33. 34.

$$x=\frac{n}{2}\sqrt{\frac{2n^2-c^2}{n^2-c^2}}-\tfrac{1}{2}c$$

§. 36.

Ponamus 9no ſonum in ſingulis tribus ſtationibus B, C, H eodem momento audiri, erit AH=AC=AB fig. 16. ergo in hoc caſu eſt $b=0$, $c=0$. Iam vero ſi $b=0$, per §. 31. eſt

$$x=\frac{np\sqrt{((n^2-c^2+mnq)^2+m^2(n^2p^2-c^2))}-(n^2-c^2+mnq)c}{2(n^2p^2-c^2)}$$

Ergo ob $c=0$ erit

$$x=\frac{np}{2n^2p^2}\sqrt{((n^2+mnq)^2+m^2n^2p^2)}$$

$$x=\frac{1}{2np}\sqrt{(n^4+2mn^3q+m^2n^2q^2+m^2n^2p^2)}$$

Sed $q^2+p^2=1$

$$x=\frac{1}{2p}\sqrt{(m^2+n^2+2mnq)}$$

§. 37.

Ponamus 10mo praeter conditiones §phi 36. adhuc BC$=$CH id est $m=n$; erit

$$x = \frac{1}{2p} \sqrt{(2m^2 + 2m^2 q)}$$

$$x = \frac{m}{2p} \sqrt{2(q+1)}$$

§. 38.

Ponamus 11mo, sonum in singulis tribus stationibus B, C, H, fig. 17. eodem momento audiri, simulque angulum datum BCH esse rectum; erit per conditionem priorem

$$x = \frac{1}{2p} \sqrt{(m^2 + n^2 + 2mnq)} \text{ §. 36.}$$

Sed per conditionem posteriorem est $p=1$, $q=0$

Ergo in hoc casu erit $x = \frac{1}{2}\sqrt{(m^2+n^2)}$.

Huius quoque Corollarii veritas facile patet a priori. Nam in hoc casu est AB$=$AC$=$AH$=x$. Et quum simul angulus BCH sit rectus, erit GC$=$AF$=\frac{1}{2}$BC$=\frac{1}{2}m$, et CF$=\frac{1}{2}$CD$=\frac{1}{2}n$.

Ergo $x^2 - \frac{1}{4}n^2 = \frac{1}{4}m^2$

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{(m^2+n^2)}$$

§. 39.

Ponamus 12mo, praeter conditiones §phi praecedentis adhuc BC$=$CD ist est, $m=n$; erit per §. 38.

$$x = \frac{1}{2}\sqrt{2m^2} = \sqrt{\tfrac{1}{2}m^2}$$

Ergo

Ergo in binis his casibus, quos §. 38. 39. assumsimus, locus A est in medio diagonalis BH.

§. 40.

Ponamus 13mo casum, qui omnibus reliquis praecellit. Eligantur nempe stationes B, C, D ita, vt sint in vna eademque recta BCD fig. 18. In hoc casu anguli dati BCD Sinus p euanescit, ergo est $p = 0$, et $q = \sqrt{(1-p^2)} = 1$. Hinc formula generalis §. 22.

$$\frac{(g+hq)^2+n^2p^2l^2}{4n^2p^2l-(k+2bnq)^2} = x^2+2\frac{(2n^2p^2bl-(g+hq)(k+2bnq))x}{4n^2p^2l-(k+2bnq)^2}$$

coalescit in hanc:

$$\frac{(g+h)^2}{-(k+2bn)^2} = x^2+2\frac{(g+h)(k+2bn)x}{(k+2bn)^2}$$

$$\frac{(g+h)^2}{-(k+2bn)^2} = x^2+2\frac{(g+h)x}{k+2bn}$$

$$0 = x+\frac{g+h}{k+2bn}$$

$$-\frac{g+h}{k+2bn} = x$$

Iam vero per §. 22. est

$g = m(n^2+b^2-c^2)$, $h = n(m^2+b^2)$, $k = 2m(b-c)$

Ergo

$$x = -\frac{mn^2+mb^2-mc^2+m^2n+b^2n}{2mb-2mc+2nb}$$

$$x = \frac{m^2n+mn^2+mb^2+nb^2-mc^2}{2(mc-mb-nb)}$$

$$x = \frac{(mn + b^2)(m + n) - mc^2}{2(mc - (m + n)b)}$$

§. 41.

De veritate huius praestantissimi omnium Corollarii vt nobis certitudo sit omnibus numeris absoluta; illud a priori euincere interest. Sint ergo fig. 18. denominationes eaedem, quibus continuo vsi sumus, nempe $AB = x$, $AC = x + b$, $AD = x + c$, $BC = m$, $CD = n$; erit $GC = m + GB$, $GD = m + n + GB$. Iam vero

$$AB^2 - GB^2 = AC^2 - GC^2$$
$$x^2 - GB^2 = x^2 + 2bx + b^2 - m^2 - 2m.\,GB - GB^2$$
$$GB = \frac{b^2 - m^2 + 2bx}{2m}$$

Porro est

$$AB^2 - GB^2 = AD^2 - GD^2$$
$$x^2 - GB^2 = x^2 + 2cx + c^2 - (m + n)^2 - 2(m + n)\,GB - GB^2$$
$$GB = \frac{c^2 - m^2 - 2mn - n^2 + 2cx}{2(m + n)}$$

Ergo

$$\frac{b^2 - m^2 + 2bx}{2m} = \frac{c^2 - m^2 - 2mn - n^2 + 2cx}{2(m + n)}$$
$$mb^2 + nb^2 - m^3 - m^2n + 2(m + n)bx = mc^2 - m^3 - 2m^2n - mn^2 + 2mcx$$
$$mb^2 + nb^2 + m^2n + mn^2 - mc^2 = 2(mc - (m + n)b)x$$
$$\frac{(mn + b^2)(m + n) - mc^2}{2(mc - (m + n)b)} = x.$$

vti §. 40. inuenimus.

§. 42.

Ponamus 14to stationes B, C, D non modo esse in eadem recta, sed etiam BC = CD, id est $m = n$, aequatio §. 40. eruta

$$x = \frac{(mn + b^2)(m + n) - mc^2}{2(mc - (m + n)b)}$$

mutabitur in hanc:

$$x = \frac{(m^2 + b^2)\, 2m - mc^2}{2(mc - 2mb)}$$

$$x = \frac{2(m^2 + b^2) - c^2}{2(c - 2b)}$$

$$x = \frac{m^2 + b^2 - \frac{1}{2}c^2}{c - 2b}$$

§. 43.

En methodum §. 40. 42. inuentam, qua praxis Geometriae acusticae tam breuis fit et commoda, vt faciliorem optare fere nefas sit. Imprimis vero haec methodus omnes post se mille relinquit parasangos, quia vbiuis locorum absque vllo applicari potest incommodo. Rarissime enim obueniet casus, in quo stationes B, C, D in directum iacentes eligere vetitum sit. Dummodo igitur obseruationes temporum, quibus sonus in qualibet statione auditur, sat accurate institui possint, ichnographia areae campestris ex solo auditu admodum facile et celeriter absoluetur.

§. 44.

Ponamus 15to stationibus B, C, D in directum iacentibus fig. 19. sonum

in B et C eodem momento audiri, erit AB = AC, adeoque $b = o$. Hinc aequatio §. 40.

$$x = \frac{(mn + b^2)(m + n) - mc^2}{2(mc - (m + n)b)}$$

transit in hanc:

$$x = \frac{mn(m + n) - mc^2}{2mc}$$

$$x = \frac{(m + n)n - c^2}{2c}$$

§. 45.

Ponamus 16to, stationibus B, C, D *in* directum iacentibus, sonum in C et D audiri eodem momento, erit fig. 20. AC = AD, ergo $b = c$. Hinc aequatio §. 40.

$$x = \frac{(mn + b^2)(m + n) - mc^2}{2(mc - (m + n)b)}$$

mutabitur in hanc:

$$x = \frac{(mn + b^2)(m + n) - mb^2}{-2nb}$$

$$x = \frac{mn(m + n) + nb^2}{-2nb}$$

$$x = \frac{(m + n)m + b^2}{-2b}$$

In hoc itaque casu *x negatiua* videtur, sed *videtur* tantum, quia reuera positiua est. Nam quum hoc casu AC = AD minor euadat, quam AB, quantitas *b* fit negatiua, adeoque $-b$ est quantitas positiua.

§. 46.

QVOD DEVS O. M. FELIX FAVSTVMQVE ET VNIVERSITATI
ALBERTINAE SALVTARE ESSE IVBEAT!

SVB AVSPICATISSIMO REGIMINE

AVGVSTISSIMI, SERENISSIMI AC POTENTISSIMI PRINCIPIS AC DOMINI,

DOMINI

FRIDERICI II.

REGIS BORVSSIAE,

MARCHIONIS BRANDENBVRGICI, S. R. I. ARCHI-CAMERARII,
ET PRINCIPIS ELECTORIS,
SVPREMI SILESIAE DVCIS, PRINCIPIS SVPREMI ARAVSIONENSIS, NOVI
CASTRI ET VALANGIAE, NEC NON COMITATVS GLACENSIS,
ETC. ETC. ETC.

REGIS, PATRIAE PATRIS AC DOMINI NOSTRI LONGE CLEMENTISSIMI,

RECTORE ACADEMIAE MAGNIFICO,
EODEMQVE ILLVSTRI CANCELLARIO ET DIRECTORE,

IOHANNE LVDOVICO L'ESTOCQ,

IVRIS VTR. DOCT. ET ANTECESSORE PRIMARIO, SACR. REG. MAIESTATIS CONSILIARIO BELLICO, CIVITATIS
REGIOMONTANAE SENATORE, EIVSQVE VT ET COLONIAE GALLICAE *IVDICE PRIMARIO*, REGIAE SOCIETATIS TEVT. MEMBRO
HONORAR. ET ORPHANOTROPH. *VOSEGIN.* COLLATORE SEN.

GRADVM *DOCTORIS PHILOSOPHIAE* ET LIBERALIVM ARTIVM MAGISTRI,
SIVE SVMMOS IN PHILOSOPHIA HONORES, IVRA, PRIVILEGIA ET IMMVNITATES,

VIRO PLVRIMVM REVERENDO ET CLARISSIMO,

IOHANNI SCHVLTZ,

MVLHVSA - BORVSSO,
COETVS PALAEOROSGARTENSIS *DIACONO MERITISSIMO*,
POST EXHIBITA DOCTIS SPECIMINIBVS ET IN EXAMINE RIGOR. EGREGIAE
ERVDITIONIS DOCVMENTA,
IN AMPLISSIMAE FACVLTATIS PHILOSOPHICAE CONSESSV,
DIE VI. IVLII, MDCCLXXV.
RITE COLLATOS ESSE, PVBLICE TESTATVR,

GEORGIVS DAVID KYPKE,

LINGVARVM ORIENTALIVM PROFESSOR ORDINARIVS ET SYNAGOGAE IVDAICAE INSPECTOR,
FACVLTATIS PHILOSOPHICAE h. t. DECANVS,
ET AD HVNC ACTVM CONSTITVTVS BRABEVTA.
DOMINICA IV. POST TRINITATIS A. C. MDCCLXXV.



REGIOMONTI,
LITTERIS HARTVNGIANIS.